

碎形 Fractal Geometry

產業研發碩士專班課程

陳慶瀚

機器智慧與自動化技術(MIAT)實驗室

義守大學電機系

pierre@isu.edu.tw

2005年10月18日



本週主題

1. 什麼是碎形?
2. 測量碎形
3. 碎形的特性
4. 碎形藝術展示



什麼是碎形？



曼德布洛(Mandelbrot, 1924~)



雲不是球形的，山不是錐形的，海岸線不是圓弧形，樹皮不是平滑的，閃電也不是以直線方式進行(Mandelbrot, 1983)。



自然的形狀

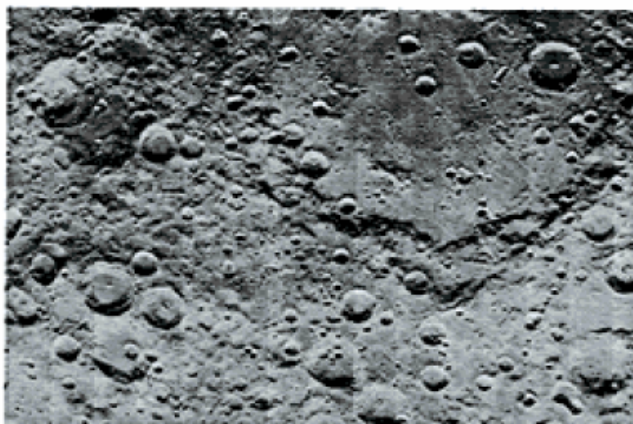
(a)



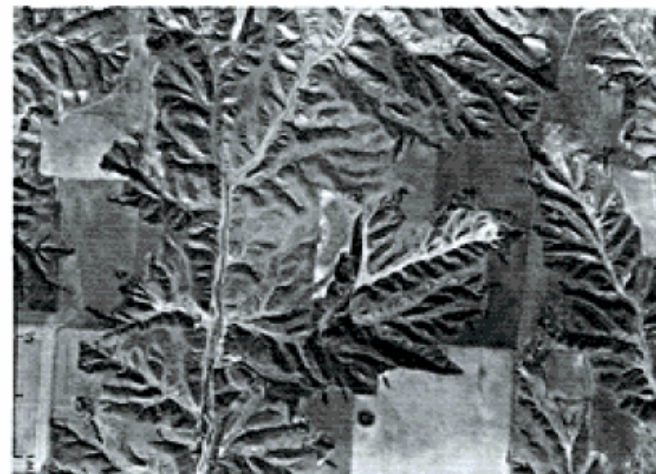
(b)



(c)



(d)





What is a Fractal ?

- A fractal is a set of fragmented geometric shape that can be subdivided in parts, each of which is (at least approximately) a reduced-size copy of the whole.
- The creation of fractals involves applying some simple rule to a set of primitive shapes or numbers and then repeating the process on the result.



Creation of a Fractal





Creation of a Fractal





Creation of a Fractal





Creation of a Fractal





Creation of a Fractal





Creation of a Fractal



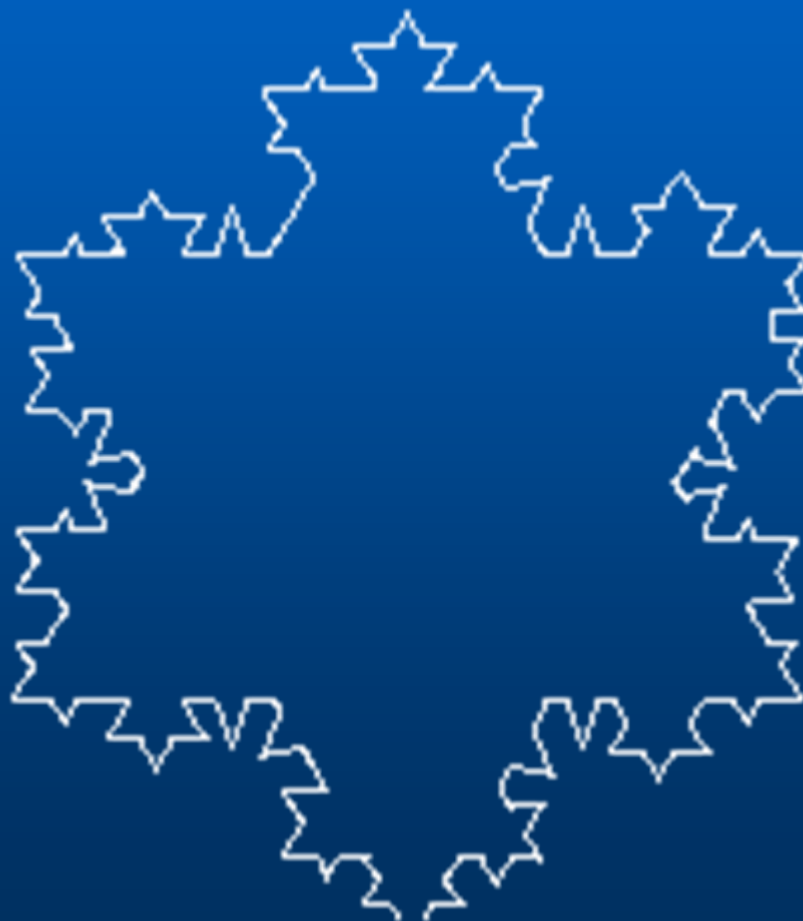


Creation of a Fractal



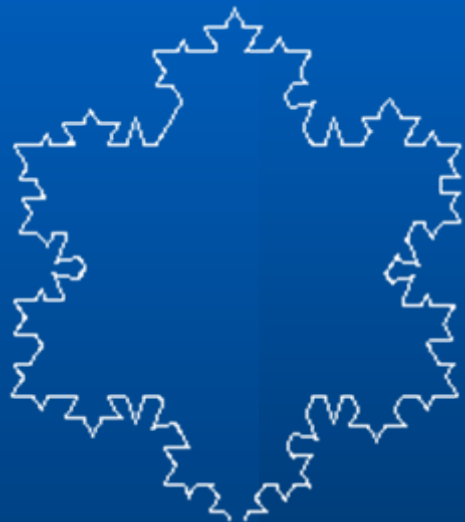


Creation of a Fractal





Fractal Geometry



- Finite Area, Infinite Perimeter!
- Everywhere Non-differentiable!



Fractal Geometry



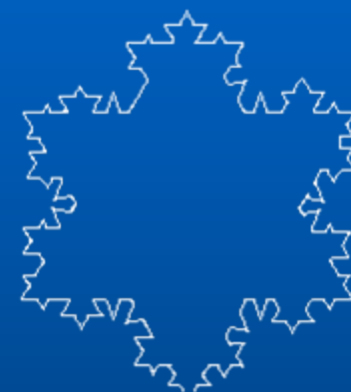
perimeter = 3



perimeter = 4



perimeter = 5.33



perimeter = 7.11

And ... perimeter = infinity in a finite area



Example of Fractal: Dragon



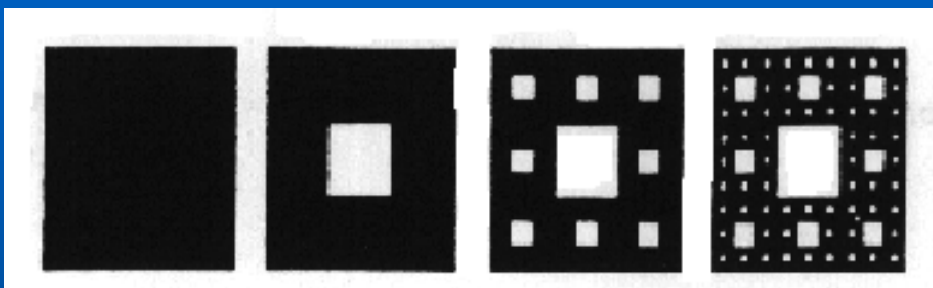


Example of Fractal: Snowflake

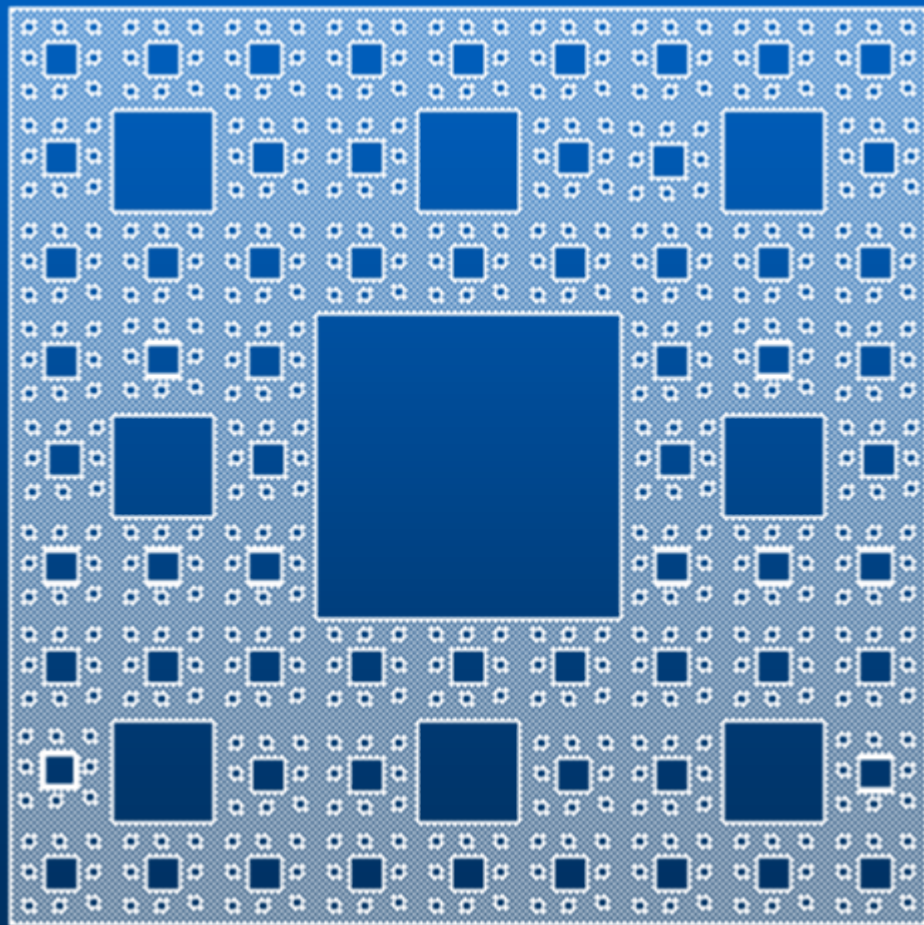




Example of Fractal: Sierpinsky Carpet



Total perimeter of all the holes (in the original square) continues to increase as the remaining area (dark) decreases. Eventually we will have something of no area but infinite perimeter of all the holes?





Example of Fractal: Hilbert Curve



This one-dimensional line completely fills a two dimensional square and never once crosses itself in the process.



測量碎形



維度(Dimension)

Dimension的兩個科學意義：

1. 歐氏幾何空間(Euclidean Space)的四個維度($D=1,2,3,4$)
2. 一個動態系統的變數數目

碎形幾何產生了第三種維度的意義：

碎形維度(Fractal Dimension)



碎形維度 (Fractal Dimension)

歐氏幾何空間D的物體縮小其線性
尺度 $1/r$ 倍，其(長度、面積、體積)
測量值將增加為

$$N = r^D$$

兩邊取 \log ，得到

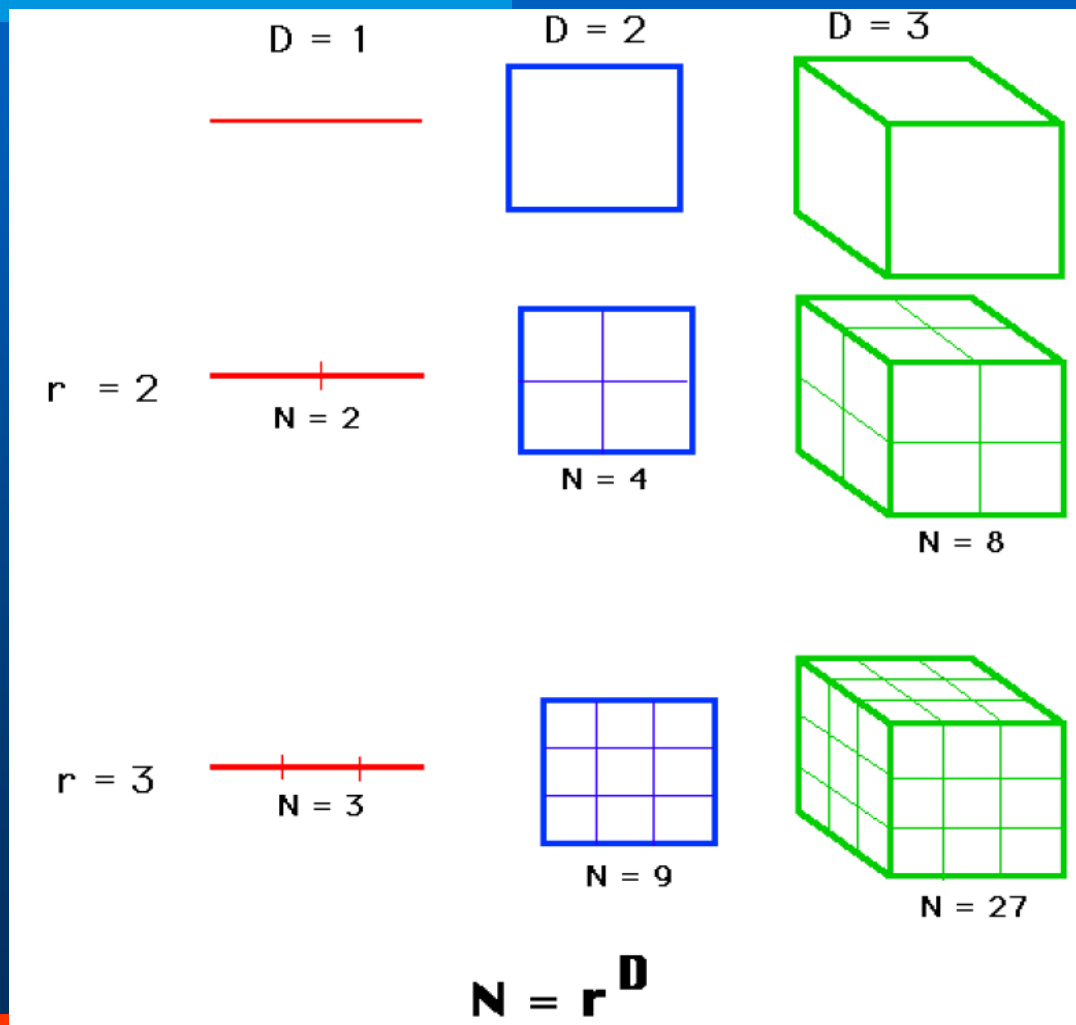
$$\log(N) = D \log(r)$$

碎形維度定義為

$$D = \log(N) / \log(r)$$

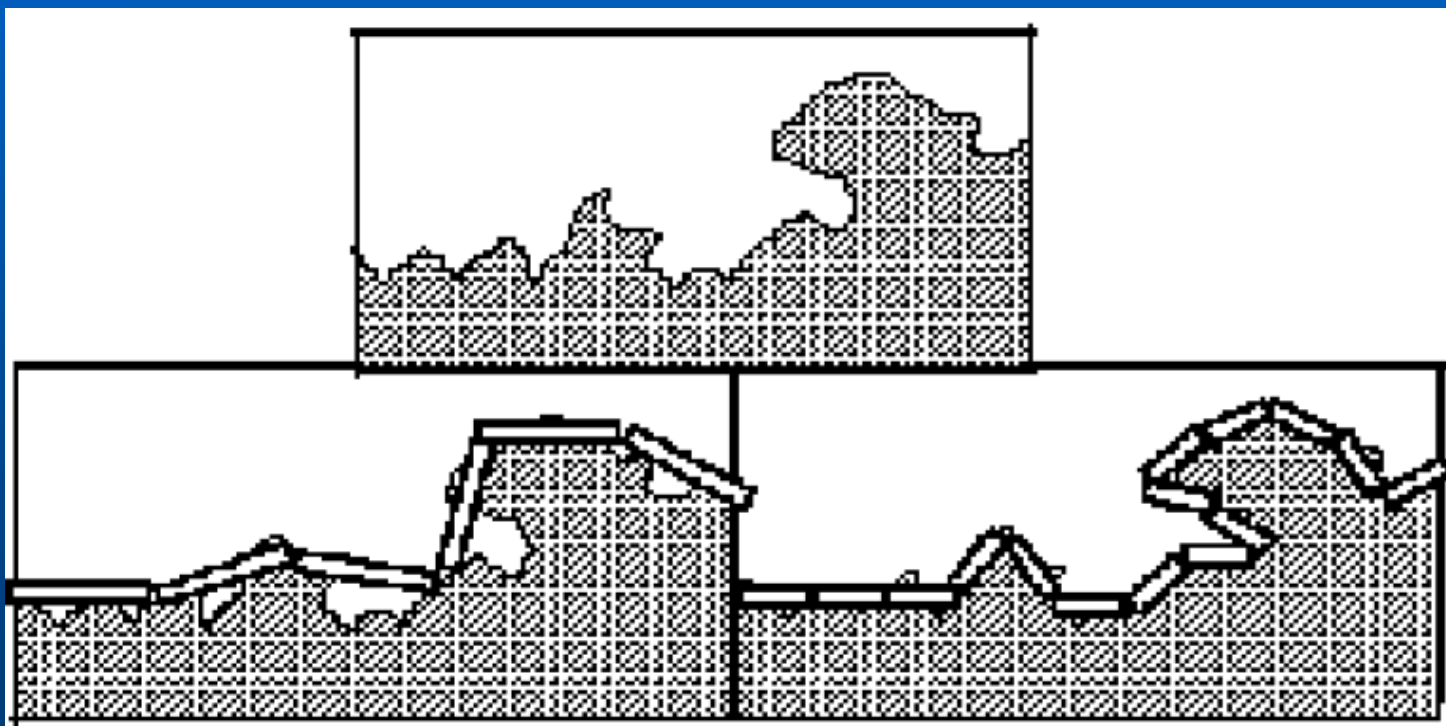


整數維度





海岸線長度的測量

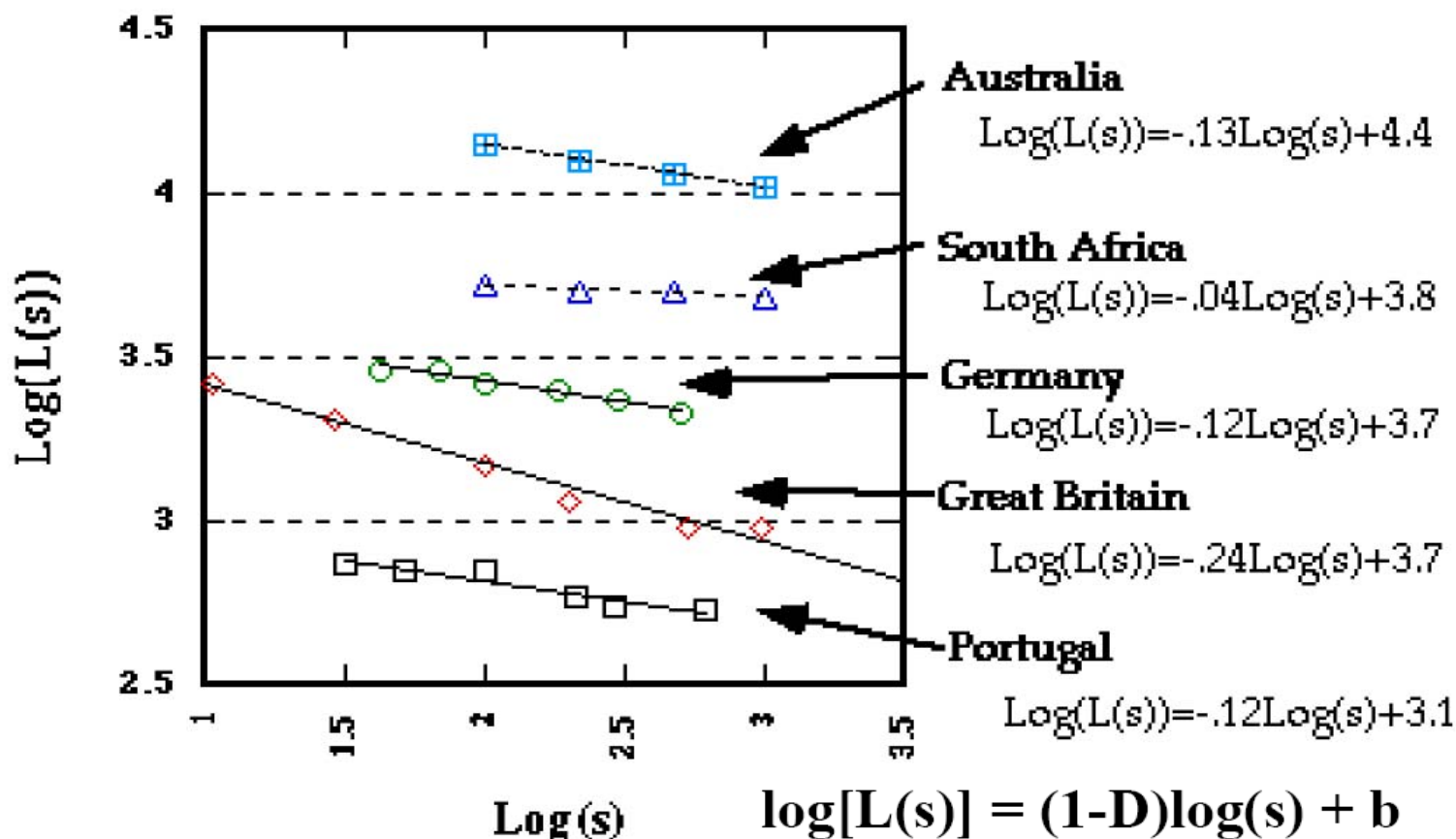


6 rulers(單位長度=1)

15 rulers(單位長度=0.5)

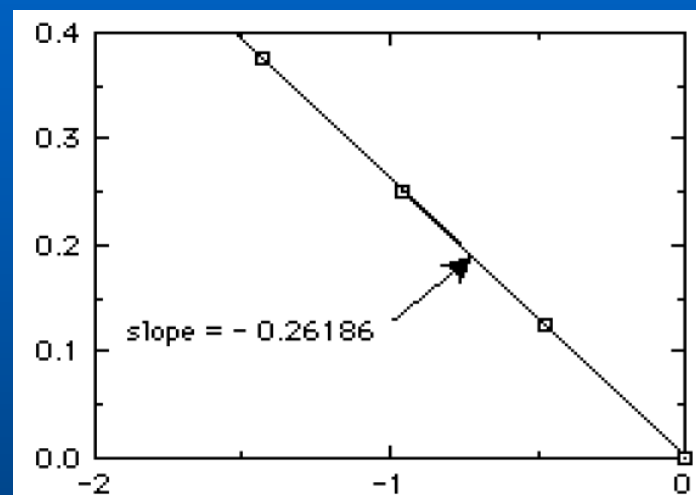
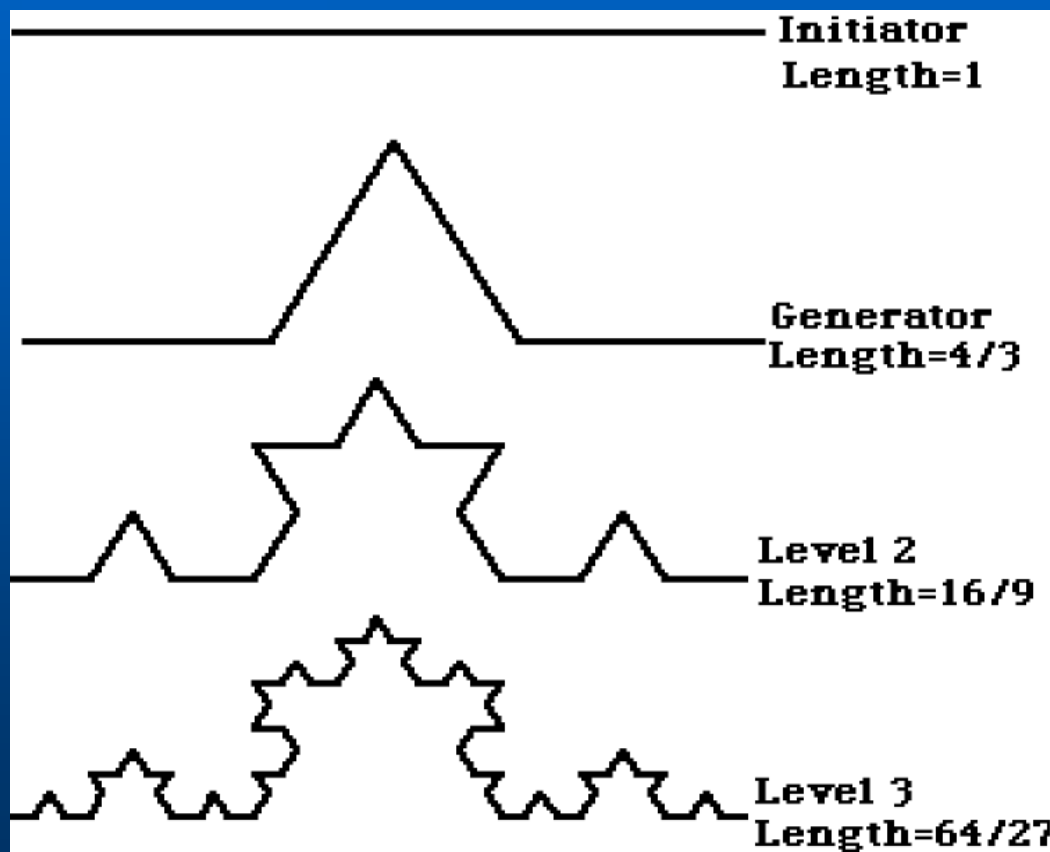


海岸線的碎形維度





Koch curve的碎形維度



$$\log[L(s)] = (1-D)\log(s) + b$$

fractal dimension

$$D = \log(N) / \log(r)$$

$$= \log(4) / \log(3) = 1.26$$



碎形維度小於1的物體

Cantor Dust(Cantor Set)



fractal dimension

$$D = \log(N) / \log(r) = \log(2) / \log(3) = 0.63$$



碎形的特性



自我相似性

碎形具有統計意義的幾何規則性。其幾何結構在不同解析度下觀察都是相同的。相同結構的不同尺度下的重複再現稱為自我相似性(**self-similarity**)。



非整數維度

每一個碎形物體均具有一個非整數值的特徵量——碎形維度(fractal dimension), 用以定量描述不同比例變化過程其結構或複雜度變化量。



迭代生成

碎形通常藉由一個簡單規則反覆迭代(iterative)運算得到。此一運算可以是自然的程序—例如岩石的侵蝕裂解，或是數學運算—解迭代方程式，使用電腦進行重複計算。



非平滑

碎形物體沒有平滑的特性，它們可以是粗糙的、破裂的、雜亂不平的。迭代運算不會產生平滑物體，而會在不同比例下產生無限的細節。因此沒有一個簡單的代數方程式可以描述碎形物體上一個特定點。



碎形藝術欣賞



碎形藝術創作

1. 碎形提供藝術與自然程序的一種新的關聯；
2. 碎形具有「決定論的」與「隨機的」的雙重性質，可同時提供繪畫/音樂的結構/規律和無法預測的美學成份。
3. 自我相似維繫了音樂(繪畫)主旋律(primitive pattern)的反覆，更可豐富整體的、協調的結構。
4. 無限的碎形細節開展了一個新的、寬廣的藝術創作概念。



結語

碎形理論重新思考了部分與整體的關係。由於元素與元素之間、元素與不同層次的子系統之間、子系統與系統之間都存在著型態、功能、信息等方面的相似性，因此整體可以反映元素的特性，而個別元素也可以具有整體的性質。